SUATU FORMULASI LAGRANGE BAGI GERAK GELOMBANG INTERNAL

JAHARUDDIN

Departemen Matematika,
Fakultas Matematika dan Imu Pengetahuan Alam,
Institut Pertanian Bogor
Jl. Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor, 16680 Indonesia

ABSTRAK. Dalam tulisan ini diturunkan persamaan gerak gelombang internal di laut dengan menggunakan suatu formulasi Lagrange. Persamaan yang diperoleh berupa persamaan Korteweg-de Vries (KdV) untuk perairan yang dangkal. Selain itu diperoleh pula persamaan Benjamin-Ono (BO)untuk laut yang memiliki kedalaman yang sangat besar.
Kata Kunci: formulasi Lagrange, persamaan KdV, persamaan BO.

1. Pendahuluan

Gelombang internal adalah gelombang yang terjadi di bawah permukaan laut sehingga tidak teramati secara kasat mata. Keberadaan gelombang internal disebabkan oleh perbedaan rapat massa air laut di setiap lapisan. Perbedaan rapat massa disebabkan oleh perbedaan suhu dan kadar garam. Sama seperti gelombang permukaan air yang merupakan gelombang pada batas antara dua fluida dengan rapat massa yang berbeda, yaitu air dan udara, gelombang internal merupakan gelombang pada batas antara dua lapisan air dengan rapat massa berbeda. Gelombang permukaan dan gelombang internal sering disebut sebagai gelombang gravitasi, karena *restoring force*-nya adalah gaya gravitasi.

Dalam fluida dengan rapat massa yang berubah terhadap kedalaman, gelombang internal dapat diamati sebagai tempat kedudukan partikel-partikel fluida yang memiliki rapat massa yang sama, yang disebut *isopycnal*. Isopycnal dapat digunakan sebagai peubah yang dikenal sebagai peubah Lagrange [1]. Persamaan dasar (*governing equation*) fluida ideal dalam formulasi Lagrange telah digunakan oleh Grimshaw (1981)[3] untuk menurunkan persamaan Korteweg-de Vries (KdV) bagi gelombang internal pada fluida dengan kedalaman yang dangkal dan persamaan Benjamin-Ono (BO) untuk kedalaman yang cukup besar, namun dalam proses penurunannya membutuhkan koordinat ray yang relatif rumit. Penurunan yang lebih sederhana dilakukan oleh Grimshaw (1981) [5] yang menurunkan persamaan BO dan oleh Gear dan Grimshaw (1983) [4] yang menurunkan persamaan KdV, namun peubah-peubah dalam formulasi Lagrange yang digunakan tidak bergantung pada waktu. Metode yang digunakan dalam penurunan persamaan-persamaan tersebut adalah metode asimtotik, yaitu suatu metode yang menggunakan uraian asimtotik pada peubah-peubah tak bebasnya [8]. Metode asimtotik digunakan juga oleh Lamb dan Yan (1996)[12] untuk menurunkan persamaan KdV dengan rapat massa yang hampir konstan, sedangkan pengaruh arus dalam arah horizontal pada persamaan KdV ini dibahas oleh Pelinovsky, Polokhina dan Lamb (2000)[13]. Penurunan persamaan KdV yang lebih umum, yaitu menggunakan persamaan dasar fluida ideal dalam formulasi Lagrange dengan peubah-peubah yang bergantung pada waktu dan melibatkan arus dalam arah horizontal dan rapat massa sembarang telah dikerjakan oleh Grimshaw, Pelinovsky dan Polokhina (2001)[7]. Dalam tulisan ini, penurunan persamaan KdV ditinjau kembali dan dituliskan secara lebih rinci dan transparan memakai peubah Lagrange dan mengikuti alur dalam paper [7]. Selanjutnya untuk kedalaman yang cukup besar, dengan cara serupa diturunkan persamaan BO, hasil ini tidak tercakup dalam paper [7].

Dalam beberapa literatur, persamaan KdV dan persamaan BO telah diturunkan sebelumnya dengan menggunakan metode asimtotik, namun memakai peubah Euler. Persamaan dasar fluida ideal dalam formulasi Euler digunakan oleh Benney (1966)[2] untuk menurunkan persamaan KdV untuk gelombang yang cukup rendah (*rather low*) dan cukup panjang (*rather long*). Koefisien-koefisien persamaan KdV yang diperoleh Benney bergantung pada rapat massa fluida. Lee dan Beardsley (1974)[11] mengikuti prosedur yang dilakukan Benney, yaitu dengan metode asimtotik, menurunkan persamaan KdV dan melibatkan adanya arus dalam arah horizontal. Koefisien persamaan KdV yang diperoleh bergantung pada rapat massa fluida dan kecepatan arus dalam arah horizontal. Ono (1975)[14] menurunkan persamaan BO dari persamaan dasar fluida ideal dalam formulasi Euler. Persamaan yang lebih umum dan meliputi persamaan KdV dan persamaan BO untuk gelombang internal telah diturunkan oleh Kubota, Ko dan Dobbs (1978) [10], yang disebut persamaan Intermediate Long Wave (ILW). Untuk kedalaman yang dangkal, persamaan ILW tereduksi menjadi persamaan KdV, sedangkan untuk kedalaman yang cukup besar, menjadi persamaan BO. Jaharuddin dan Pudjaprasetya (2002) [9] juga memperoleh persamaan ILW yang sama dengan menerapkan langsung metode asimtotik yang sedikit berbeda. Persamaan KdV dan persamaan BO dalam formulasi Euler ini diharapkan ekivalen dengan persamaan KdV dan persamaan BO yang diturunkan dalam tulisan ini.

Sesuai dengan tujuan pembahasan di atas, urutan pembahasan dimulai dengan memformulasikan persamaan dasar fluida ideal ke dalam bentuk formulasi Lagrange. Penurunan persamaan gerak untuk fluida dangkal dan fluida dalam diturunkan pada bagian selanjutnya. Sedangkan kesimpulan akan diberikan pada bagian akhir.

2. Formulasi Lagrange

Dalam bagian ini diturunkan persamaan dasar dalam formulasi Lagrange dari persamaan dasar dalam formulasi Euler untuk fluida ideal yang dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \rho_t + u\rho_x + w\rho_z &= 0, \\ u_x + w_z &= 0, \\ \rho(u_t + uu_x + wu_z) + p_x &= 0, \\ \rho(w_t + uw_x + ww_z) + p_z + \rho g &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

pada seluruh domain fluida dan syarat batasnya berbentuk

$$\begin{aligned} w &= 0 && \text{di} \quad z = -h, \\ \eta_{ot} + u\eta_{ox} &= w && \text{di} \quad z = \eta_o(x,t), \\ p &= 0 && \text{di} \quad z = \eta_o(x,t). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Misalkan simpangan vertikal partikel fluida dari posisi kesetimbangannya dinotasikan oleh $\zeta(x,z,t)$, maka

$$w = \frac{D\zeta}{Dt}. \tag{2.3}$$

Rapat massa fluida sebagai akibat dari perpindahan partikel fluida dari posisi kesetimbangannya ke dalam keadaan terganggu, menjadi

$$\rho(x,z,t) = \rho_o\left(z - \zeta(x,z,t)\right) \tag{2.4}$$

dan tekanan p dinyatakan dalam bentuk

$$p(x,z,t) = p_o(z) + q(x,z,t)$$

dengan $p_o(z)$ menyatakan tekanan pada keadaan setimbang yang dalam keadaan hidrostatik $p_{oz} = -g\rho_o$.

Selanjutnya, apabila Z menyatakan posisi vertikal partikel fluida pada keadaan setimbang, maka berdasarkan Persamaan (2.4), permukaan isopycnal, yaitu $\rho(x,z,t) =$ konstan, dinyatakan sebagai

$$z = Z + \zeta(x,z,t). \tag{2.5}$$

Peubah bebas Z merupakan peubah Lagrange. Persamaan (2.5) menunjukkan bahwa z bergantung pada x, Z dan t sehingga dapat dituliskan

$$f(x,z,t) = f(x, z(x,Z,t), t) \equiv F(x,Z,t)$$

dengan f dan F fungsi yang diketahui. Jadi diperoleh hubungan

$$f_x = F_x - F_Z\zeta_x, \qquad f_z = F_Z(1-\zeta_z), \qquad f_t = F_t - F_Z\zeta_t. \tag{2.6}$$

Jika dituliskan $\zeta(x,z,t) = \xi(x,Z,t)$, $u(x,z,t) = U(x,Z,t)$, $w(x,z,t) = W(x,Z,t)$ dan $q(x,z,t) = Q(x,Z,t)$, maka dengan menggunakan (2.6), Persamaan dasar (2.1) menjadi

$$\begin{aligned}
U_x + W_Z - \frac{1}{1+\xi_Z}(U_Z\xi_x + W_Z\xi_Z) &= 0,\\
\rho_o(Z)(U_t + UU_x) + Q_x - \frac{1}{1+\xi_Z}Q_Z\xi_x &= 0, \qquad (2.7)\\
\rho_o(Z)(W_t + UW_x) + \frac{1}{1+\xi_Z}Q_Z + g(\rho_o(Z) - \rho_o(Z+\xi)) &= 0.
\end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (2.3), diperoleh komponen vertikal dari kecepatan W dalam bentuk

$$W = \xi_t + U\xi_x. \tag{2.8}$$

Dari Persamaan (2.2) dan (2.8), syarat batas kinematik di permukaan fluida $z = \eta_o(x,t)$ menghasilkan $\xi = \eta_o$. Selanjutnya, Syarat batas (2.2) menjadi

$$\begin{aligned}
\xi &= 0 && \text{di} \quad Z = -h,\\
\int_0^{\xi} g\rho_o(z)dz &= Q(x,Z,t) && \text{di} \quad Z = 0. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Jika Q dieliminasikan dari (2.7), maka dengan menggunakan W dalam (2.8), diperoleh persamaan berikut

$$\begin{aligned}
(1+\xi_Z)U_x + (\partial_t + U\partial_x)\,\xi_Z &= 0\\
(\rho_o(U_t + UU_x))_Z + \xi_x\left(\rho_o(\partial_t + U\partial_x)^2\xi\right)_Z - & \qquad (2.10)\\
(1+\xi_Z)\left(\rho_o(\partial_t + U\partial_x)^2\xi\right)_x + g\rho_{oZ}\xi_x &= 0
\end{aligned}$$

dan Syarat batas (2.9) menjadi

$$\begin{aligned}
\xi &= 0 && \text{di} \quad Z = -h,\\
g\xi_x &= -(U_t + UU_x) - \xi_x\,(\partial_t + U\partial_x)^2\,\xi \ \text{di} && Z = 0. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Persamaan (2.10) dengan Syarat batas (2.11) adalah persamaan dasar dalam bentuk formulasi Lagrange untuk fluida ideal.

Untuk menyelesaikan Persamaan (2.10) dengan Syarat batas (2.11) secara analitis, diperlukan beberapa asumsi berikut:

(1) Gelombang mempunyai panjang gelombang yang cukup panjang dan pengamatan dilakukan untuk waktu yang cukup lama. Pengertian panjang dan lama didasarkan pada pemilihan suatu parameter ϵ sehingga peubah fisis x dan t dapat dituliskan dalam peubah yang baru $X = \epsilon x$ dan $\tilde{T} = \epsilon t$.

(2) Gelombang internal yang ditinjau merambat hanya secara horizontal dalam satu arah dengan koordinat berjalan $\theta = X - c\tilde{T}$.
(3) Amplitudo gelombang yang ditinjau cukup kecil, misalkan berorde α. Jika amplitudo gelombang a dengan peubah waktu $\tilde{T}$, maka diasumsikan amplitudo $\bar{a} = \alpha a$ dengan peubah waktu $\tau = \alpha\tilde{T}$.

Berdasarkan asumsi-asumsi di atas, Persamaan (2.10) menjadi

$$\begin{aligned} (c\rho_o U_\theta)_Z - g\rho_{oZ}\xi_\theta &= F_1, \\ U_\theta - c\xi_{\theta Z} &= F_2 \end{aligned} \tag{2.12}$$

dengan

$$\begin{aligned} F_1 &= -(\rho_o(\alpha U_\tau + UU_\theta))_Z + \epsilon^2(1+\xi_Z)(\rho_o F_3)_\theta - \epsilon^2\xi_\theta(\rho_o F_3)_Z, \\ F_2 &= -\alpha\xi_{Z\tau} - (U\xi_Z)_\theta, \\ F_3 &= ((U-c)\partial_\theta + \alpha\partial_\tau)^2\,\xi, \end{aligned}$$

sedangkan Syarat batas (2.11) menjadi

$$\begin{aligned} \xi &= 0 && \text{di} \quad Z = -h, \\ g\xi_\theta &= cU_\theta - (\alpha U_\tau + UU_\theta + \epsilon^2\xi_\theta F_3), && \text{di} \quad Z = 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Eliminasi U pada Persamaan (2.12) dan Syarat batas (2.13), mengubah Persamaan (2.12) menjadi

$$\left(c^2\rho_o\xi_{\theta Z}\right)_Z + \rho_o N^2\xi_\theta = G, \qquad -h < Z < 0 \tag{2.14}$$

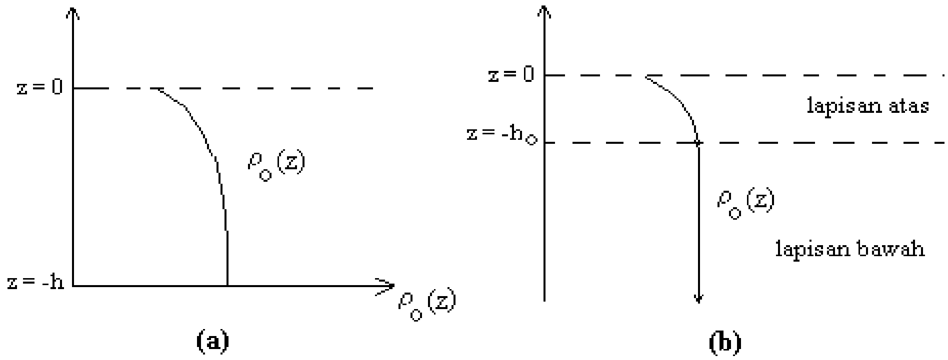
dengan $G = -\left(c\rho_o F_2\right)_Z - F_1$ dan $N^2(Z) = -g\rho_{oZ}/\rho_o$, sedangkan Syarat batas (2.13) menjadi

$$\begin{aligned} \xi &= 0 && \text{di} \quad Z = -h, \\ g\xi_\theta &= c^2\xi_{\theta Z} + cF_2 + F_4 && \text{di} \quad Z = 0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

dengan $F_4 = -(\alpha U_\tau + UU_\theta + \epsilon^2\xi_\theta F_3)$.

3. Persamaan gerak gelombang internal

Pada bagian ini akan diturunkan persamaan gerak bagi gelombang internal dengan metode asimtotik terhadap Persamaan (2.14) dengan Syarat batas (2.15). Penurunan persamaan-persamaan gerak tersebut akan dipisahkan pada dua situasi berbeda. Situasi pertama, yang disebut *fluida dangkal* (Gambar 1.a), rapat massa fluida dalam keadaan setimbang ($\rho_o(z)$) berubah secara kontinu terhadap z. Situasi kedua, yang disebut *fluida dalam* (Gambar 1.b), rapat massa fluidanya berubah secara kontinu sampai pada kedalaman tertentu dan selanjutnya rapat massanya hampir konstan.



Gambar 1. Rapat massa $\rho_o(z)$ untuk (a) fluida dangkal (b) fluida dalam

3.1. **Fluida dangkal.** Berdasarkan asumsi (3), $\xi = O(\alpha)$. Bentuk linear Persamaan (2.11) memberikan $U - U_o = O(\alpha)$. Untuk itu, uraian asimtotik ξ dan U terhadap α dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha\xi_1 + \alpha^2\xi_2 + \cdots \\ U &= U_o(Z) + \alpha U_1 + \alpha^2 U_2 + \cdots \end{aligned} \tag{3.1}$$

dengan $U_o(Z)$ kecepatan arus dalam arah horizontal pada keadaan setimbang. Jika Uraian asimtotik (3.1) disubstitusi ke dalam Persamaan (2.14) dan Syarat batas (2.15), kemudian menyeimbangkan α dan ϵ^2 ($\alpha = \epsilon^2$) agar asumsi gelombang panjang dilibatkan, maka koefisien $\alpha^{3/2}$ memberikan masalah nilai batas untuk ξ_1 sebagai berikut

$$\begin{aligned} \left(\rho_o(U_o - c)^2\xi_{1\theta Z}\right)_Z + \rho_o N^2 \xi_{1\theta} &= 0, & & -h < Z < 0, \\ \xi_{1\theta} &= 0 & \text{di} \quad & Z = -h, \\ (U_o - c)^2\xi_{1\theta Z} - g\xi_{1\theta} &= 0 & \text{di} \quad & Z = 0. \end{aligned}$$

Kemudian, jika dituliskan

$$\xi_1(\theta, Z, \tau) = A(\theta, \tau)\phi(Z) \tag{3.2}$$

dengan fungsi $A(\theta, \tau)$ akan ditentukan, maka diperoleh masalah nilai batas untuk ϕ berikut

$$\begin{aligned} \left(\rho_o(U_o - c)^2\phi_Z\right)_Z + \rho_o N^2 \phi &= 0, & & -h < Z < 0, \\ \phi &= 0 & \text{di} \quad & Z = -h, \\ (U_o - c)^2\phi_Z - g\phi &= 0 & \text{di} \quad & Z = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Masalah nilai batas untuk ϕ pada Persamaan (3.3) dapat dipandang sebagai masalah nilai eigen dengan nilai eigen $c^{(n)}$ dan fungsi eigen $\phi^{(n)}$ yang berkaitan, $n = 0, 1, 2, \cdots$ dengan $c^{(n)} > c^{(n+1)}$. Mode pertama, yaitu pasangan $(\phi^1, c^{(1)})$ yang akan digunakan, karena kecepatan phase gelombang untuk mode ini yang terbesar dan fungsi eigennya mempunyai satu nilai ekstrim di dalam domain fluida [7]. Karena persamaan diferensial dalam masalah nilai eigen di atas berbentuk linear, maka penyelesaian masalah nilai eigen tersebut memuat perkalian dengan hanya satu konstanta. Konstanta ini dipilih sedemikian sehingga fungsi ϕ bernilai satu pada titik ekstrimnya ($\phi(Z_m) = 1$). Pemilihan ini menyatakan bahwa $A(\theta, \tau)$ merupakan simpangan vertikal partikel fluida di $Z = Z_m$.

Untuk menentukan $A(\theta, \tau)$ perlu ditinjau orde selanjutnya. Pada orde selanjutnya, yaitu koefisien $\alpha^{5/2}$, diperoleh masalah nilai batas berikut

$$\begin{aligned} \left(\rho_o(U_o - c)^2 \xi_{2\theta Z}\right)_Z + \rho_o N^2 \xi_{2\theta} &= F, \qquad -h < Z < 0 \\ \xi_{2\theta} &= 0 \text{ di} \qquad Z = -h, \\ (U_o - c)^2 \xi_{2\theta Z} - g\xi_{2\theta} &= M \qquad \text{di} \qquad Z = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

dengan

$$\begin{aligned} F &= -2\left(\rho_o(U_o - c)\phi_Z\right)_Z A_\tau + 3\left(\rho_o(U_o - c)^2 \phi_Z^2\right)_Z AA_\theta \\ &\quad -\rho_o(U_o - c)^2 \phi A_{\theta\theta\theta}, \\ M &= -2(U_o - c)\phi_Z A_\tau + 3(U_o - c)^2 \phi_Z^2 AA_\theta. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Syarat keterselesaian bagi Masalah nilai batas (3.4) adalah

$$\int_{-h}^{0} F\phi dZ = \rho_o(U_o - c)^2 (\xi_{2\theta Z}\phi - \xi_{2\theta}\phi_Z) \mid_{Z=-h}^{Z=0} \tag{3.6}$$

dengan ϕ dan ξ_2 berturut-turut penyelesaian Masalah nilai batas (3.3) dan (3.4). Jika bentuk F pada Persamaan (3.5) disubstitusi ke dalam Persamaan (3.6), maka diperoleh persamaan berikut

$$A_\tau + \mu AA_\theta + \delta A_{\theta\theta\theta} = 0 \tag{3.7}$$

dengan μ dan δ berturut-turut memenuhi

$$\mu = \frac{3\int_{-h}^{0} \rho_o(U_o - c)^2 \phi_Z^3 dZ}{2\int_{-h}^{0} \rho_o(c - U_o)\phi_Z^2 dZ}, \quad \delta = \frac{\int_{-h}^{0} \rho_o(U_o - c)^2 \phi^2 dZ}{2\int_{-h}^{0} \rho_o(c - U_o)\phi_Z^2 dZ}. \tag{3.8}$$

Selanjutnya, apabila peubah-peubah θ dan τ pada Persamaan (3.7) dikembalikan ke peubah fisis x dan t, maka Persamaan (3.7) menjadi

$$A_t + cA_x + \mu\alpha AA_x + \delta A_{xxx} = 0. \tag{3.9}$$

Persamaan (3.9) sama dengan Persamaan KdV yang telah dihasilkan oleh Benney (1966)[2] dengan $\eta = \alpha A$. Persamaan (3.7) disebut *persamaan KdV* bagi gelombang internal pada orde $O(\alpha^2)$.

Apabila koefisien μ pada Persamaan (3.7) sama dengan nol, maka Persamaan KdV (3.7) menjadi tidak bisa digunakan, karena masalah yang ditinjau merupakan masalah tak linear. Jadi diperlukan suatu persamaan gerak dengan orde yang lebih tinggi.

3.2. **Fluida Dalam.** Pembahasan persamaan gerak gelombang internal pada fluida ideal yang memiliki kedalaman yang sangat besar dilakukan dengan menggunakan distribusi rapat massa pada keadaan setimbang $\rho_o(z)$ seperti pada Gambar 1.b. Misalkan domain fluida didefinisikan sampai pada kedalaman h yang sangat besar sehingga dapat diberlakukan Persamaan (2.14) dengan Syarat batas (2.15). Penyelesaian Persamaan (2.14) dengan Syarat batas (2.15) pada domain $-h \leq Z \leq 0$ ditentukan berdasarkan penyelesaian pada lapisan atas $-h_o < Z \leq 0$ dan penyelesaian pada lapisan bawah $-h \leq Z < -h_o$ dengan memperhatikan syarat-syarat kekontinuan di $Z = -h_o$. Nilai h_o ditetapkan sebagai kedalaman dengan rapat massa yang berubah ke nilai konstan, seperti diillustrasikan pada Gambar 1.b.

Untuk lapisan atas, yaitu $-h_o < Z \leq 0$, substitusi Uraian asimtotik (3.1) ke dalam Persamaan (2.14) dan ke dalam Syarat batas (2.15) di $Z = 0$. Kemudian gunakan keseimbangan α dan ϵ ($\alpha = \epsilon$, hubungan ini yang membedakan dengan penurunan persamaan KdV) dan bentuk ξ_1 yang diberikan pada Persamaan (3.2); koefisien α menghasilkan masalah nilai batas untuk ϕ berikut

$$\begin{aligned}\left(\rho_o(U_o - c)^2\phi_Z\right)_Z + \rho_o N^2\phi &= 0, \; -h_o < Z < 0,\\ (U_o - c)^2\phi_Z - g\phi &= 0 \qquad \text{di} \qquad Z = 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Untuk orde selanjutnya, koefisien α^2 memberikan masalah nilai batas untuk ξ_2 berikut

$$\begin{aligned}\left(\rho_o(U_o - c)^2\xi_{2\theta Z}\right)_Z + \rho_o N^2\xi_{2\theta} &= F, \qquad -h_o < Z < 0,\\ (U_o - c)^2\xi_{2\theta Z} - g\xi_{2\theta} &= M \qquad \text{di} \qquad Z = 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

dengan

$$\begin{aligned} F &= -2\left(\rho_o(U_o - c)\phi_Z\right)_Z A_\tau + 3\left(\rho_o(U_o - c)^2\phi_Z^2\right)_Z AA_\theta,\\ M &= -2(U_o - c)\phi_Z A_\tau + 3(U_o - c)^2\phi_Z^2 AA_\theta. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Syarat keterselesaian bagi Masalah nilai batas (3.11) adalah

$$\int_{-h_o}^{0} F\phi dZ = \rho_o(U_o - c)^2(\xi_{2\theta}\phi_Z - \xi_{2\theta Z}\phi)\mid_{Z=-h_o}^{Z=0} \tag{3.13}$$

dengan ϕ dan ξ_2 berturut-turut penyelesaian Masalah nilai batas (3.10) dan (3.11). Karena suku-suku ruas kanan Persamaan (3.13) di $Z = -h_o$ belum diketahui, maka akan ditentukan nilai-nilai ϕ dan $\xi_{2\theta}$ beserta turunannya terhadap Z di $Z = -h_o$ dengan menggunakan hasil fluida di lapisan bawah.

Pada lapisan bawah, yaitu $-h \leq Z < -h_o$, dimisalkan $\xi = \alpha\bar{\xi}(\theta, \bar{Z}, \tau)$ dengan $\bar{Z} = \epsilon Z$, rapat massa $\rho_o(z) = \rho_\infty$ yang diasumsikan konstan dan $U_o = 0$. Peubah-peubah di lapisan bawah ditandai dengan garis atas $(\bar{\cdot})$. Jika semua ini disubstitusi ke Persamaan (2.14) dan Syarat batas (2.15) di $Z = -h$, maka koefisien α menghasilkan masalah nilai batas

$$
\begin{aligned}
\bar{\xi}_{\theta\theta\theta} + \bar{\xi}_{\bar{Z}\bar{Z}\theta} &= 0, & -\alpha h < \bar{Z} < -\alpha h_o, \\
\bar{\xi}_{\theta}(\theta, \bar{Z}, \tau) &= 0 \quad \text{di} & \bar{Z} = -\alpha h, \\
\bar{\xi}_{\theta}(\theta, \bar{Z}, \tau) &= \xi_o \text{ di} & \bar{Z} = -\alpha h_o
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

dengan $\xi_0(\theta, \tau)$ ditentukan berdasarkan hasil-hasil pada lapisan atas. Dengan menggunakan *metode integral Fourier*, penyelesaian Masalah nilai batas (3.14) dinyatakan dalam bentuk integral, yaitu

$$
\bar{\xi}_{\theta}(\theta, \bar{Z}, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\xi}_0(k, \tau) \frac{\sinh(k\bar{Z} + \alpha k h)}{\sinh(\alpha k (h - h_0))} \exp(ik\theta) dk
$$

dengan

$$
\hat{\xi}_0(k, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_0(\theta, \tau) \exp(-ik\theta) d\theta.
$$

Turunan pertama $\bar{\xi}_{\theta}$ terhadap Z di $Z = -h_o$ adalah

$$
\bar{\xi}_{\theta Z}(\theta, -h_0, \tau) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k \coth(kH) \exp(ik\theta) \hat{\xi}_0(k, \tau) dk \tag{3.15}
$$

dengan $H = \alpha(h - h_0)$.

Untuk memperoleh nilai-nilai ϕ dan $\xi_{2\theta}$ beserta turunannya terhadap Z di $Z = -h_0$, dimisalkan penyelesaian ξ dan turunannya terhadap Z di lapisan atas dan lapisan bawah, sama sampai $O(\alpha^2)$ di $Z = -h_0$. Dengan demikian dari uraian asimtotik penyelesaian ξ lapisan atas dan lapisan bawah memberikan

$$
\begin{aligned}
\alpha \xi_1(\theta, -h_0, \tau) + \alpha^2 \xi_2(\theta, -h_0, \tau), &= \alpha \bar{\xi}(\theta, -h_0, \tau), \\
\alpha \xi_{1Z}(\theta, -h_0, \tau) + \alpha^2 \xi_{2Z}(\theta, -h_0, \tau) &= \alpha \bar{\xi}_Z(\theta, -h_0, \tau).
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Dari bentuk ξ_1 yang diberikan pada (3.2), koefisien α dan α^2 untuk persamaan pertama pada (3.16) sesudah diturunkan terhadap θ berturut-turut memberikan $\xi_o = A_{\theta}(\theta, \tau)\phi(-h_o)$ dan $\xi_{2\theta}(\theta, -h_o, \tau) = 0$. Koefisien α dan α^2 untuk persamaan kedua pada (3.16) sesudah diturunkan terhadap θ berturut-turut memberikan $\xi_{1\theta Z} = 0$ dan $\alpha \xi_{2\theta Z} = \bar{\xi}_{\theta Z}$. Karena $\bar{\xi}_{\theta Z} = O(\alpha)$, lihat Persamaan (3.15), maka diperoleh $\phi_Z(-h_o) = 0$ dan

$$
\xi_{2\theta Z}(\theta, -h_0, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k \coth(kH) \exp(ik\theta) \hat{\xi}_0(k, \tau) dk.
$$

Jika dinormalkan sehingga $\phi(-h_0) = 1$, diperoleh $\xi_0 = A_{\theta}(\theta, \tau)$ sehingga

$$
\xi_{2\theta Z}(\theta, -h_0, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k \coth(kH) \exp(ik\theta) F(A_{\theta}) dk
$$

dengan

$$F(A) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\theta,\tau) exp(-ik\theta) d\theta.$$

Jika nilai-nilai ϕ dan $\xi_{2\theta}$ beserta turunannya terhadap Z di $Z = -h_o$ yang diperoleh di atas disubstitusi ke dalam Persamaan (3.13), maka diperoleh persamaan untuk $A(\theta,\tau)$ berikut

$$A_\tau + \bar{\mu} A A_\theta + \bar{\delta} L(A_\theta) = 0 \tag{3.17}$$

dengan

$$L(A_\theta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k \coth(kH) \exp(ik\theta) F(A_\theta) dk. \tag{3.18}$$

Koefisien $\bar{\mu}$ dan $\bar{\delta}$ berturut-turut diberikan oleh persamaan

$$\bar{\mu} = \frac{3\int_{-h_o}^{0} \rho_o (U_o - c)^2 \phi_Z^3 dZ}{2\int_{-h_o}^{0} \rho_o (c - U_o)\phi_Z^2 dZ}\ ,\ \bar{\delta} = \frac{c^2 \rho_\infty}{2\int_{-h_0}^{0} \rho_0 (c - U_o)\phi_Z^2 dZ}. \tag{3.19}$$

Untuk $H \to \infty$, Persamaan (3.18) menjadi

$$L(A_\theta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mid k \mid \exp(ik\theta) F(A_\theta) dk. \tag{3.20}$$

Dengan menggunakan *integral kompleks* diperoleh

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ik\theta)}{\bar{\theta} - \theta} d\bar{\theta} = i\pi(\mathrm{sgn}(k)) \exp(-ik\theta).$$

Jadi

$$\mid k \mid F(A) = \int_{-\infty}^{\infty} H(A_\theta) \exp(-ik\theta) d\theta$$

dengan

$$H(A) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\bar{\theta},\tau)}{\bar{\theta} - \theta} d\bar{\theta}$$

yang merupakan *transformasi Hilbert dari* A. Persamaan (3.20) berbentuk

$$L(A_\theta) = -H(A_{\theta\theta})$$

dan Persamaan (3.17) menjadi

$$A_\tau + \bar{\mu} A A_\theta - \bar{\delta} H(A_{\theta\theta}) = 0 \tag{3.21}$$

dengan koefisien $\bar{\mu}$ dan $\bar{\delta}$ yang diberikan pada Persamaan (3.19).

Selanjutnya, jika peubah-peubah θ dan τ pada Persamaan (3.17) dan Persamaan (3.21) dinyatakan kembali ke dalam peubah fisis x dan t, maka Persamaan (3.17) dan Persamaan (3.21) berturut-turut menjadi

$$A_t + cA_x + \alpha\bar{\mu} A A_x + \bar{\delta} L(A_x) = 0 \tag{3.22}$$

dan

$$A_t + cA_x + \alpha\bar{\mu} A A_x - \bar{\delta} H(A_{xx}) = 0. \tag{3.23}$$

Jika $\eta = \alpha A$, maka Persamaan (3.22) adalah persamaan yang dihasilkan oleh Kubota, Ko, dan Dobbs (1978) [10], dan Persamaan

(3.23) sama dengan yang dihasilkan oleh Ono (1975) [14]. Persamaan (3.17) dan (3.21) berturut-turut disebut *persamaan ILW* dan *persamaan BO* dengan orde $O(\alpha^2)$.

4. Penutup

Persamaan-persamaan gerak gelombang internal di laut diturunkan dari persamaan dasar dalam suatu formulasi Lagrange dengan menggunakan dua asumsi berikut ini. Asumsi pertama, gelombang mempunyai panjang gelombang yang cukup panjang dan amplitudo yang cukup kecil. Asumsi kedua, gelombang internal yang ditinjau didominasi oleh gelombang yang merambat hanya secara horizontal dalam satu arah. Dengan menggunakan metode asimtotik terhadap simpangan vertikal partikel fluida dari posisi kesetimbangannya, diperoleh persamaan gerak untuk fluida dangkal yang berupa persamaan KdV dan untuk fluida dalam berupa persamaan BO. Koefisien-koefisien persamaan KdV dan persamaan BO bergantung pada rapat massa dan kecepatan arus di dalam air laut.

Daftar Pustaka

[1] Andrews, D.G., M.E. Mc Intyre (1978), An exact theory of nonlinear waves on a Lagrangian-mean flow, *J. Fluid Mech.*, **89**, 609-646

[2] Benney, D.J. (1966), Long nonlinear waves in fluid flows, *J. Math. Phys.*, **45**, 52-63

[3] Grimshaw, R. (1981), Evolution equations for long, nonlinear internal waves in stratified shear flows, *Studies in Applied Math.*, **65**, 159-188

[4] Gear, J., R. Grimshaw (1983), A second-order theory for solitary waves in shallow fluids, *Phys. Fluids*, **26**, 14-29

[5] Grimshaw, R. (1981), A second-order theory for solitary waves in deep fluids, *Phys. Fluids*, **24**, 1611-1618

[6] Grimshaw, R. (1997), Internal solitary waves, dalam *Advances in Coastal and Ocean Engineering*, Bab 1, Liu, P.L.F., Editor, World Scientific Pub. Company, Singapore, **3**, 1-30

[7] Grimshaw, R., E. Pelinovsky, O. Poloukhina (2001), Higher-order Korteweg-de Vries models for internal solitary waves in a stratified shear flow with a free surface, submitted to *Nonlinear Proc. in Geophy.*

[8] Hinch, E.J. (1992), *Perturbation Methods*, Cambridge Univ. Press, Cambridge

[9] Jaharuddin, S.R. Pudjaprasetya (2002), Evolution equations for density stratified fluids, *Proceedings ITB*, **34**, 131-142

[10] Kubota, T., D.R.S. Ko, L.D. Dobbs (1978), Propagation of weakly nonlinear internal waves in a stratified fluid of finite depth, *AIAA J. Hydrodyn*, **12**, 157-165

[11] Lee, C.Y., R.C. Beardsley (1974), The generation of long nonlinear internal waves in weakly stratified shear flow, *J. Geophys. Res.*, **79**, 453-462

[12] Lamb, K., L. Yan (1996), The evolution of internal wave undular bores: comparisons of a fully nonlinear numerical model with weakly nonlinear theory, *J. Phys. Oceanography*, **26**, 2712-2734

[13] Pelinovsky, E.N., O.E. Poloukhina, K. Lamb (2000), Nonlinear internal waves in the ocean stratified on density and current, *Oceanology*, **40**, 805-815

[14] Ono, H. (1975), Algebraic solitary wave in stratified fluids, *J. Phys. Soc. Japan*, **39**, 1082-1091